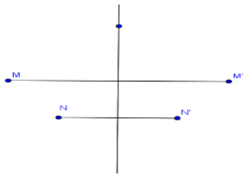
LA ROTATION DANS LE PLAN

I) RAPPELLES ET COMPLEMENTS

1) La symétrie axiale.

Définition/Soit (D) une droite donnée. On dit que le point M' est le symétrique du point M par rapport à (D)



1°si : $M' = M$ si $M \in (D)$

2°(D) est la médiatrice du segment $[MM']$ si $M \notin (D)$.

La relation qui lie le point M à M' s'appelle : **la symétrie axiale d'axe (D) ;** se notre par $S_{(D)}$.

On écrit : $S_{(D)}(M) = M'$.

Remarques :

1)Si $M \notin (D)$ alors $M' = S_{(D)}(M) \neq M$ et (D) est la médiatrice du segment $[MM']$

C'est-à-dire passe par I milieu de $[MM']$ et perpendiculaire à (MM').

2)Si $N \in (D)$ alors $S_{(D)}(N) = N$ on dit que N est invariant par $S_{(D)}$

3)Inversement si un point N est invariant par $S_{(D)}$ alors $N \in (D)$

Propriétés : La symétrie axiale conserve :

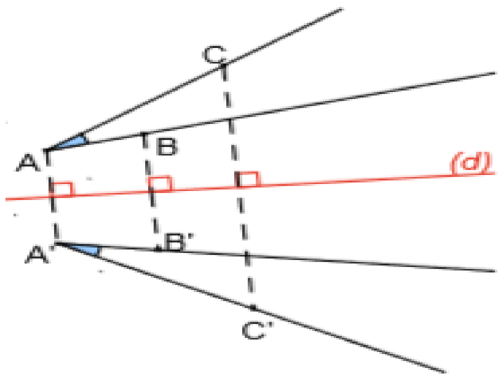
1)Les distances : si $M' = S_{(D)}(M)$ et $N' = S_{(D)}(N)$ alors $MN = M'N'$

2)Le milieu d'un segment et en générale le barycentre d'un système pondéré.

3)les mesures des angles **géométriques**

4)Le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

La symétrie axiale inverse les mesures des



angles orientés : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)[2\pi]$

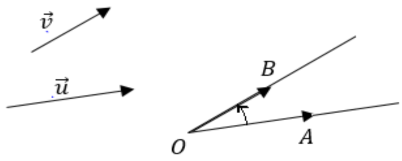
Propriété : La symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ est une bijection et sa bijection réciproque est elle-même

Preuve : $S_{(\Delta)}(M) = M' \Leftrightarrow S_{(\Delta)}(M') = M$

2) Les angles orientés

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et soient A et B



deux points du plan orienté tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ l'angle orienté des demis droites $[OA)$; $[OB)$ s'appelle aussi angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on le note par : $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ .la mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ est la mesure de l'angle orienté $([OA), [OB))$ et se note par $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)$.

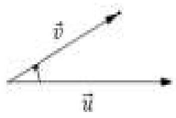
Propriétés :

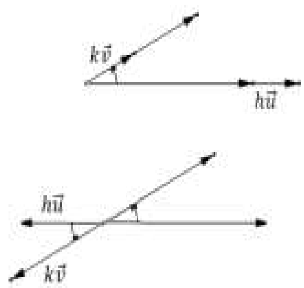
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et h et k deux réels non nuls ; on a :

$\left(\overline{\vec{v};\vec{u}}\right) \equiv -\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)[2\pi]$

1)si $hk > 0$ alors : $\left(\overline{k\vec{u};h\vec{v}}\right) \equiv \left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)[2\pi]$

2)si $hk < 0$ alors : $\left(\overline{k\vec{u};h\vec{v}}\right) \equiv \pi + \left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)[2\pi]$





II) LA ROTATION DANS LE PLAN

1) Définition :

1.1 Composition de deux symétries axiales

Activité : Soient (Δ) et (Δ′) deux droites sécantes en O ; $M_1 = S_{(\Delta)}(M)$ et $M' = S_{(\Delta')}(M_1)$ et soit $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \equiv \alpha[2\pi]$ où $\vec{u}$ vecteur directeur de (Δ) et $\vec{v}$ vecteur directeur de (Δ′)

1- Quelle est l'application qui transforme M en M'.

2- Montrer que $OM = OM'$

3- Montrer que pour tout M dans le plan on a : $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) \equiv 2\alpha[2\pi]$

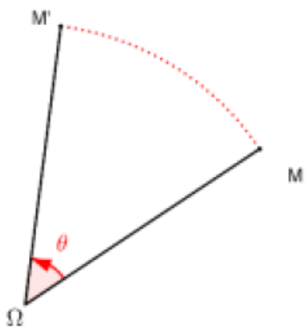
Propriété : Soient (Δ) et (Δ′) deux droites sécantes en O ; $S_{(\Delta)}$) et $S_{(\Delta')}$ les symétries axiales d'axes respectifs (Δ) et (Δ′) soit $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \equiv \alpha[2\pi]$ où $\vec{u}$ vecteur directeur de (Δ) et $\vec{v}$ vecteur directeur de (Δ′).

L'application $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ transforme le point M en M' tel que : $\begin{cases} OM = 0M' \\ (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{0M'}) \equiv 2\alpha[2\pi] \end{cases}$

L'application $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)}$ s'appelle la rotation de centre $\boldsymbol{O}$ et d'angle $\boldsymbol{2\alpha}$

1.2 Définition de la rotation.

Définition : Soit Ω un point dans le plan et θ un nombre réel, **la rotation de centre Ω et d'angle $\boldsymbol{\theta}$** est l'application qui transforme tout point M en M' tel que :

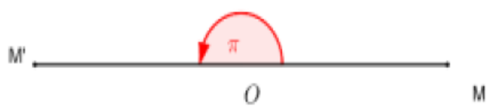


$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$

On la note par : R (Ω, θ)

Remarque : Si l'angle de la rotation est non nul, son centre est le seul point invariant.

Exemples : 1) La symétrie centrale S_O est la Rotation de centre O et d'angle π



2) L'identité IdP est la rotation d'angle nul.

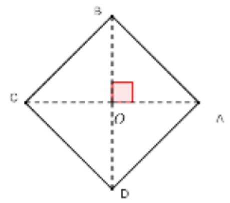
(Tous les points de (P) sont centre de cette rotation)

Exercice1 : ABCD est un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ positif. Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O une rotation de centre O et d'angle α .

1) Déterminer $r_A(A)$; $r_A(B)$; $r_A(D)$,

2) Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = B$?

Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = C$?



Solution : $r_A\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r_O(O;\alpha)$

- $r_A(A) = A$ Car le centre est le seul point invariant.
- $r_A(B) = D$ Car $\begin{cases} AB = AD \\ (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$
- $r_A(D) = B'$ avec B' le symétrique de B par rapport a A

2) $r_O(A) = B \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

$r_O(A) = C \Leftrightarrow \alpha = \pi$

2) Propriétés de la rotation

2.1 La décomposition d'une rotation

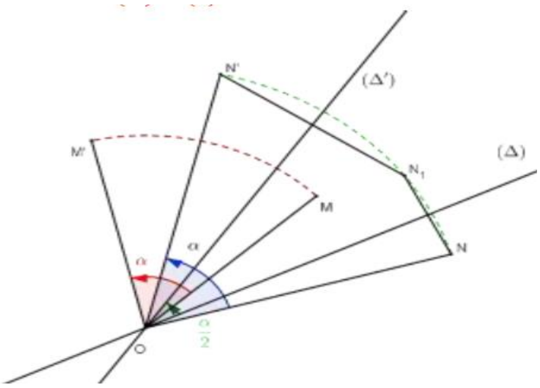
Soit R la rotation de centre O et d'angle α

1) (Δ) une droite quelconque qui passe par O et (Δ′) l'image de (Δ) par la rotation $\boldsymbol{r}$ de centre $\boldsymbol{O}$ et d'angle $\frac{\alpha}{2}$

D'après ce qui précède ($S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)}$) est la rotation de centre O et d'angle $2\frac{\alpha}{2} = \alpha$

Donc : $S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} = R$. (Figure 1)

Figure1



2) (Δ) une droite quelconque qui passe par O et (Δ') l'image de (Δ) par

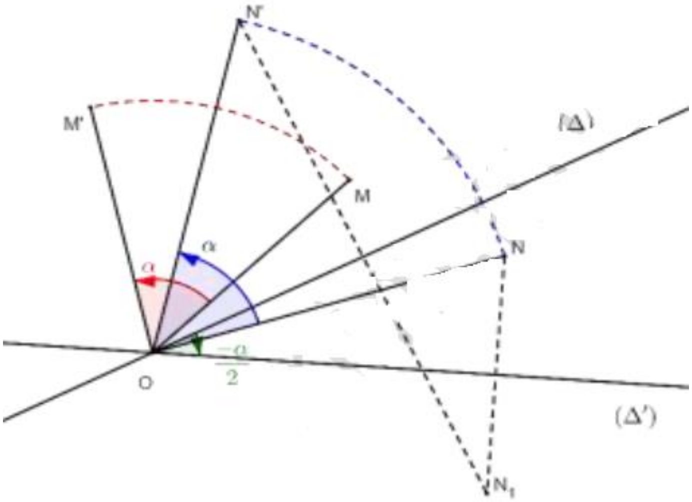
la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\alpha}{2}$

D'après ce qui précède (composition de deux symétries axiales)

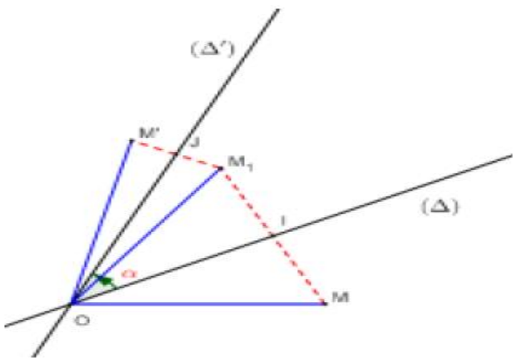
$S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$ est la rotation de centre O

et d'angle $2\frac{\alpha}{2} = \alpha$

Donc : $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')} = R$. (figure 2)



Propriété : Soit R la rotation de centre O et



d'angle α ; la rotation R peut-être décomposée comme suite :

1) $R = S_{(\Delta')} o S_{(\Delta)}$ **où** (Δ') l'image de (Δ) par la rotation r de centre O et d'angle **:** $\frac{\alpha}{2}$

2) $R = S_{(\Delta)} o S_{(\Delta')}$ **où** (Δ') l'image de (Δ) par la rotation r de centre O et d'angle : $-\frac{\alpha}{2}$

Exercice2 :

ABCD est un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ positif et Soit r la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$

Décomposer la rotation r en composée de deux symétries orthogonales

Solution : $r = S_{(AD)} \circ S_{(AC)}$ car $(AD) \cap (AC) = \{A\}$

et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

OU $r = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ car $(AB) \cap (AC) = \{A\}$

et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

2.2 Propriété d'une rotation.

Puisque toute rotation est la composition de deux symétries axiales on peut en déduire les propriétés suivantes :

1) La rotation est une isométrie (elle conserve les distances) : si $R(A) = A'$ et $R(B) = B'$

Alors $A'B' = AB$

2) La rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs et par suite conserve la linéarité des points

3) La rotation conserve le milieu et le barycentre d'un système pondéré.

4) La rotation conserve les mesures des angles géométriques

5) La rotation conserve les mesures des angles orientés (les deux symétries qui composent la rotation inversent les mesures des angles orientés)

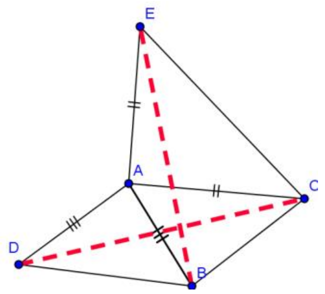
Applications :

Exercice3 : ABC est un triangle.

On construit à l'extérieur deux triangles ABD et ACE isocèles et rectangles en A

1) Montrer que : $BE = CD$

2) Montrer que : $(BE) \perp (CD)$



Solution :

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a : $\begin{cases} AD = AB \\ \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

donc : $r(D) = B$ ❶

On a : $\begin{cases} AC = AE \\ \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : ❷ $r(C) = E$

Et puisque la rotation conserve les distances

Alors de ❶ et ❷ en déduit que $BE = CD$

2) on a $r(D) = B$ et $r(C) = E$

Donc : $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ par suite : $(BE) \perp (CD)$

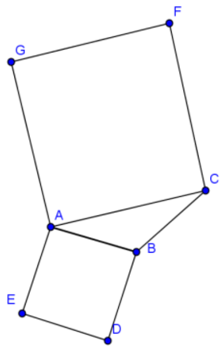
Exercice4 : ABC est un triangle tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ positif. On construit à l'extérieur les carrés $ABDE$ et $ACFG$

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

déterminer : $r(E)$ et $r(C)$

Et Montrer que : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)[2\pi]$

Solution :



on a : $\begin{cases} AE = AB \\ \left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(E)=B$ ❶

Et on a : $\begin{cases} AC = AG \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : ❷ $r(C)=G$

Et on a : $r(A)=A$ ❸ car A le centre de la rotation

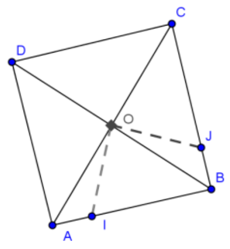
De : ❶et❷ et❸ en déduit que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)[2\pi]$

Exercice5 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}\right)$ positif.

I et J deux points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Montrer que $(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$

Solution : il suffit de montrer que **:** $r(I)=J$ ؟؟؟؟



On pose : $r(I)=I'$

On a : $\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(A)=B$

Et on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BI'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❶ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❷

De ❶ et ❷ en déduit que $\overrightarrow{BI'}=\overrightarrow{BJ}$ donc $I'=J$

Donc $r(I)=J$ par suite : $\begin{cases} OI = OJ \\ \left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

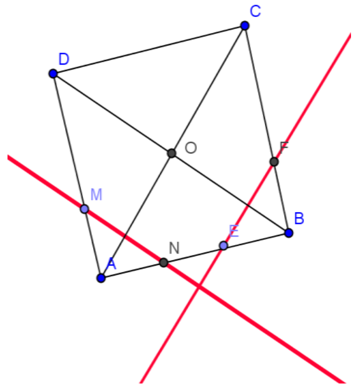
Exercice6 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}\right)$ positif. Soit (D) la droite parallèle a (BD) et coupe (AD) en M et coupe (AB) en N et Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. E et F les images M et N respectivement Par la rotation r

1)Faire une figure et Montrer que $(EF)\perp(MN)$

2)Déterminer l'image de la droite (BD) par la rotation r

3)Montrer que $DN=FA$ et $(EF)\parallel(AC)$

Solution :1)



on a :❶ $r(M)=E$

et : $r(N)=F$ ❷

de ❶ et ❷ en deduit que:

$\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{EF}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc : $(EF)\perp(MN)$

2) on a: $\begin{cases} 0B = 0C \\ \left(\overrightarrow{0B},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(B)=C$ ❶

Et on a : $\begin{cases} 0D = 0A \\ \left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(D)=A$ ❷

de ❶ et ❷ en deduit que: $r((BD))=(AC)$

3) $DN=FA$ ؟؟؟

on a: ❶ $r(D)=A$ et ❷ $r(N)=F$

donc : $DN=FA$

$(EF)\parallel(AC)$ ؟؟؟

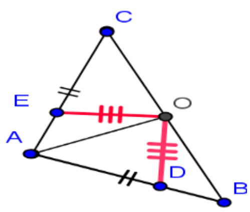
On a : $(MN)\parallel(BD)$ et $r((BD))=(AC)$ et $r((MN))=(EF)$

Donc : $(EF)\parallel(AC)$ car la rotation conserve le parallélisme

Exercice7 : ABC est un triangle isocèles et rectangles en A tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ positif et O le milieu du segment $[BC]$.D et E deux points tels que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

Montrer que ODE est un triangle isocèles et rectangles en O

Solution : il suffit de montrer que **:** $r(E)=D$ ؟؟؟؟



On pose : $r(E)=E'$

On a : $\begin{cases} OA = OC \\ \left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(C)=A$ ❶

Et on a : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$ ❷

Et on a : $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ ❸

De ❶et❷et❸: en déduit que : $\overrightarrow{AE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❹ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❺

De❹et ❺ en déduit que : $\overrightarrow{AE'}=\overrightarrow{AD}$ cad $E'=D$

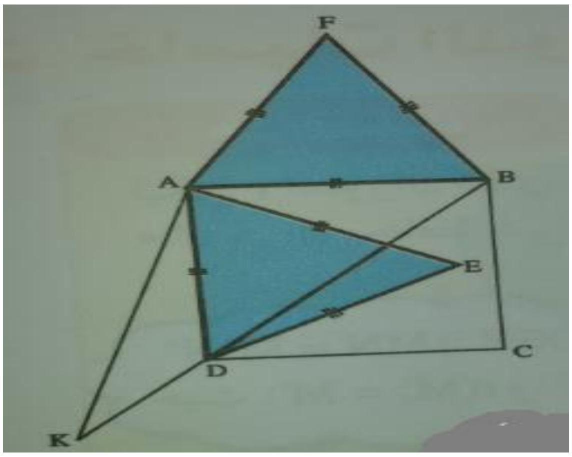
Donc : $r(E)=D$ par suite : $\begin{cases} OE=OD \\ \left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc ODE est un triangle isocèles et rectangles en O

Exercice8 : ABCD est un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ positif. et AED et AFB deux triangles équilatéraux

Montrer que les points : E et C et F sont alignés

Solution : soit r la rotation de centre A et



d'angle $\frac{\pi}{3}$: $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$

et soit K l'antécédent de C par r

On a : $r(B)=F$

Car $\begin{cases} AB=AF \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(D)=E$ Car $\begin{cases} AD=AE \\ \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(K)=C$

donc : $AK=AC$ et $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

puisque : $AB=BC$ donc B appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et $AD=DC$ donc D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et on a : $AK=AC$ et $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

donc : AKC est équilatéral donc K appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

Donc les points : K et B et D sont alignés

Et puisque la rotation conserve les alignement des points alors :les points : E et C et F sont alignés

Propriété : La rotation R (Ω,θ) est une bijection et sa bijection réciproque est la bijection R $(\Omega, -\theta)$

Preuve : $R(\Omega,\theta)(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M=\Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\theta[2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M'=\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M}\right)\equiv-\theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R(\Omega,-\theta)(M')=M$

Propriété : (Propriété fondamentale de la rotation)

Soit R (Ω,θ) la rotation de centre Ω et d'angle θ

si $R(M)=M'$ et $R(N)=N'$ alors $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}\right)\equiv\theta[2\pi]$

Preuve : On a :

$\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{\Omega M}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{M'N'}\right)[2\pi]$

$\equiv\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)[2\pi]$car : $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{\Omega M}\right)\equiv\left(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{\Omega M'}\right)[2\pi]$

(la rotation conserve la mesure des angles orientés)

D'où : $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{\Omega M}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{M'N'}\right)\equiv 0[2\pi]$

III) COMPOSITION DE DEUX ROTATIONS

1) Composition de deux rotations de même centre

Soient $R(\Omega,\alpha)$ et $R'(\Omega,\beta)$ deux rotations de centre Ω ; Posons $R(M)=M_1$ et $R(M_1)=M'$

$$M \xrightarrow{R} M_1 \xrightarrow{R'} M', \qquad M \xrightarrow{R'\circ R} M'$$

$R(M)=M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M=\Omega M_1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M_1}\right)\equiv\alpha[2\pi] \end{cases}$

$R(M_1)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M_1=\Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M_1},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\beta[2\pi] \end{cases}$

On en déduit que : $\begin{cases} \Omega M=\Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\alpha+\beta[2\pi] \end{cases}$

Et par suite : $R''(\Omega, \alpha+\beta)(M) = M'$

et $(R'(\Omega, \beta) o\, R(\Omega,\alpha))(M) = M'$

Donc $R'(\Omega, \beta)\ o\ R(\Omega, \alpha) = R''(\Omega, \alpha+\beta)$.

Propriété : La composition de deux rotations $R(\Omega, \alpha)$ et $R'(\Omega, \beta)$ de même centre Ω est la rotation de centre Ω et d'angle $(\alpha + \beta)$:

$\boldsymbol{R'(\Omega, \beta)\ o\ R(\Omega,\alpha) = R''(\Omega,\alpha+\beta)}$.

Remarque : On sait que la rotation $R(\Omega, \alpha)$ est une bijection et sa bijection

Réciproque est $R'(\Omega, -\alpha)$

Donc :$R'(\Omega,-\alpha) o R(\Omega,\alpha) = R''(\Omega,0) = \mathcal{I}d_P$

2) Composition de deux rotations de centres différents.

2.1 Composition de deux symétries axiales d'axes parallèles

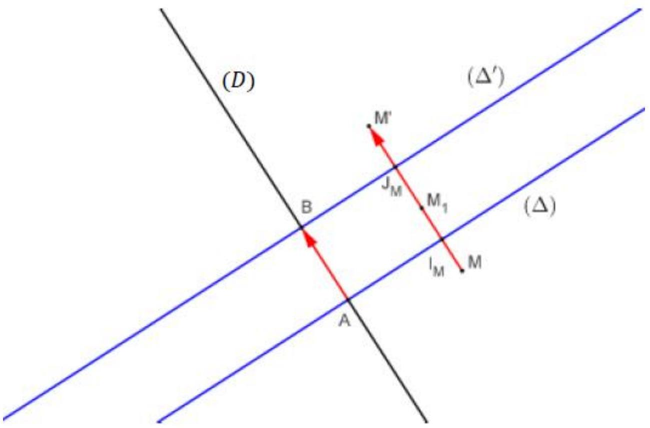
Soient (Δ) et (Δ') deux droites parallèles dans le plan. $S_{(\Delta)}$ et $S'_{(\Delta')}$ les symétries

Axiales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') On a :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "S_{(\Delta)}"] \arrow[rr, bend right, "S'o\,S"'] & M_1 \arrow[r, "S'_{(\Delta')}"] & M' \end{tikzcd}$$

Soit (D) une droite perpendiculaire à (Δ)

A et B les intersections respectives de (D) et (Δ) et de (D) et (Δ')



Soient I_M et J_M les milieux respectifs de $[MM_1]$ et $[M_1M']$, on a :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{I_MM_1} + 2\overrightarrow{M_1J_M}$$

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{I_MJ_M} = 2\overrightarrow{AB}$$

Propriété : La composition de deux symétries axiales $S_{(\Delta)}$ et $S'_{(\Delta')}$

d'axes parallèles est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B les intersections respectives de (D) et (Δ) et de (D) et (Δ') avec (D) une droite perpendiculaire à (Δ)

si $(\Delta) \parallel (\Delta')$ alors : $S'_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{AB}}$

2.2 Composition de deux rotations de centres différents.

Soient $R(O,\alpha)$ et $R(\Omega,\beta)$ deux rotations dans le plan où $\Omega \neq O$ on

S'intéresse à la nature de la transformation $R'oR$

On sait que toute rotation peut être décomposée en composée

de deux symétries axiales.

Posons $(\Delta) = (O\Omega)$

On a : $R = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)}$ où (Δ_1) est l'image de la droite (Δ) par la

rotation r_1 de centre O et d'angle $-\dfrac{\alpha}{2}$

D'autre part : $R' = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)}$ où (Δ_2) est l'image de la droite (Δ) par la

rotation r_2 de centre Ω et d'angle $\dfrac{\beta}{2}$

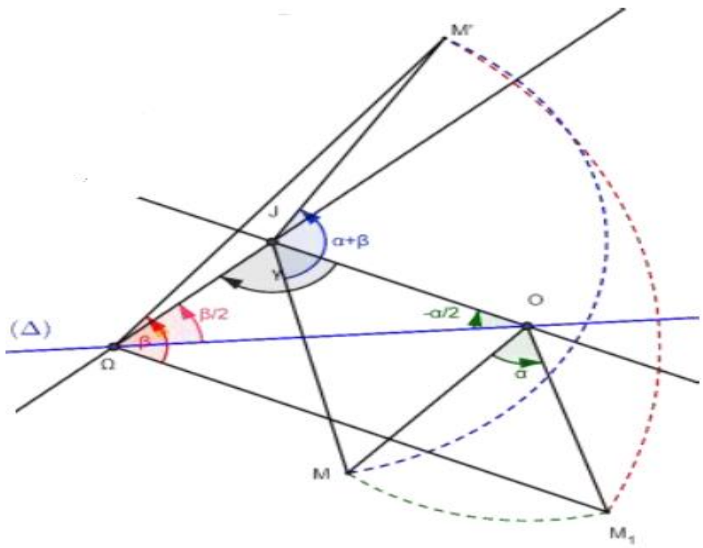
D'où : $R' \circ R = \left(S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)}\right) \circ \left(S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)}\right)$

$R' \circ R = \left(S_{(\Delta_2)} \circ \left(S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)}\right) \circ S_{(\Delta_1)}\right)$(La composition est associative)

$R' \circ R = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$ car $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)} = \mathcal{I}_P$

La nature de $R'oR$ **dépend de la position relative de (Δ) et (Δ')**

Si (Δ) et (Δ') se coupent en J (figure 1)



Dans ce cas $R'\circ R = S_{(\Delta_2)}\circ S_{(\Delta_1)}$ est une rotation de centre J et d'angle $2\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ modulo 2π où $\vec{u}$ vecteur directeur de (Δ_1) et $\vec{v}$ vecteur directeur de (Δ_2).

Détermination de l'angle de la rotation :2 γ

On a : $-\gamma-\frac{-\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\equiv\pi[2\pi]$ (lire tous les angles dans le sens trigonométrique)

d'où : $\gamma\equiv\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-\pi[2\pi]$ car ($-\pi \equiv \pi[2\pi]$)

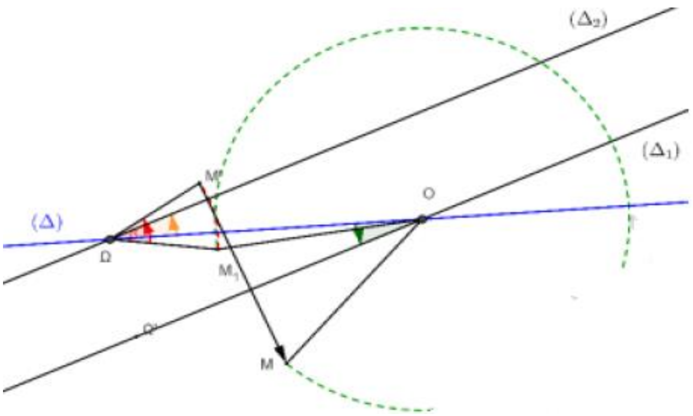
Finalement : $2\gamma = \alpha + \beta\ [2\pi]$ car $(2\pi \equiv 0[2\pi])$

Si (Δ) et (Δ') sont parallèles (figure 2)

Dans ce cas $R'\circ R = S_{(\Delta_2)}\circ S_{(\Delta_1)}$ est une translation.

Quand est ce que (Δ) et (Δ') sont parallèles ?

$(\Delta)\parallel(\Delta')\Leftrightarrow -\frac{\alpha}{2}\equiv\frac{\beta}{2}[2\pi]\Leftrightarrow \alpha+\beta\equiv 0[2\pi]$



(Figure 2)

Théorème : Soient $R(O,\alpha)$ et $R(\Omega,\beta)$ deux rotations dans le plan où $\Omega \neq O$

1°Si $\boldsymbol{\alpha + \beta \neq 2k\pi}$ alors $R'oR$ est une **rotation d'angle $\boldsymbol{\alpha + \beta}$**

2°Si $\boldsymbol{\alpha + \beta = 2k\pi}$ alors $R'oR$ est une **translation dans le plan.**

Remarque : Pour déterminer les éléments de la rotation ou de la translation il est indispensable de maitriser toutes les étapes de la démonstration.

Exercice9 : ABCD est un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ positif et Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1)déterminer la nature de la transformation suivante : $S_{(AD)}\circ S_{(AB)}$

1)on considère les rotations suivantes : $r\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r'\left(B;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r''\left(C;-\frac{\pi}{2}\right)$

déterminer la nature des transformations suivante : $r\circ r'$ et $r\circ r''$

Solution : 1) $S_{(AD)}\circ S_{(AB)} = r\left(A;2\frac{\pi}{2}\right)=r(A;\pi)=S_A$

2) a) $r\circ r'$ on a $A\neq B$ et $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\neq 2k\pi$ donc c'est une rotation $r\left(?;\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=r(?;\pi)$ cad une symétrie central

Déterminons le centre de la rotation $r\circ r'$?

On a : $r\circ r' = S_{(AC)}\circ S_{(AB)}\circ S_{(AB)}\circ S_{(BD)} = S_{(AC)}\circ S_{(BD)}$

Et puisque : $(AC)\cap(BD)=\{O\}$

Alors le le centre de la rotation est le point O

2) b) $r\circ r''$???

on a $A\neq C$ et $\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ donc c'est une translation

Déterminons le vecteur de la translation $r\circ r''$?

On a : $r\circ r''(C)=r\left(r''(C)\right)=r(C)=C'$

Avec : $\begin{cases} AC = AC' \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc $r\circ r''$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{CC'}$

Exercice10 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}\right)$ négatif. Soient M, N, P et Q quatre points dans le plan tels que : $\overrightarrow{DQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

la droite (AN) coupe les droites (DM) et (BP) Respectivement en E et F

la droite (CQ) coupe les droites (DM) et (BP) Respectivement en H et G

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$

1)Faire une figure dans le cas ou : $AB=6cm$

2)Montrer que : $r(M)=N$ et $r(N)=P$ et $r(P)=Q$ et $r(Q)=M$

3) a)Montrer que : $r(F)=G$

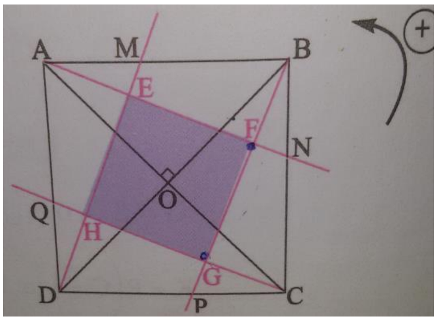
b)en déduire que : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

4)a) calculer : $(r\circ r)(F)$ et $(r\circ r)(E)$

4)b) en déduire que :les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont le même milieu

5) Montrer que : EFGH est un carré

Solution :1)



2) on a $\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A) = B$

$\begin{cases} OB = OC \\ \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(B) = C$

Et puisque $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{r(A)r(M)} = \frac{1}{3}\overrightarrow{r(A)r(B)}$

cad : $\overrightarrow{Br(M)} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et on a : $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

donc : $r(M) = N$

de meme : on montre que : $r(N) = P$ et $r(P) = Q$ et $r(Q) = M$

3) a)on montre que : $r(F) = G$?

Puisque : $r(N) = P$ et $r(A) = B$ alors : $r((AN)) = (BP)$

Et Puisque : $r(P) = Q$ et $r(A) = B$ alors : $r((AN)) = (BP)$

Et puisque : $r(P) = Q$ et $r(B) = C$ alors : $r((BP)) = (QC)$

Donc : $r((AN) \cap (BP)) = r((AN)) \cap r((BP))$ car r est une application injective

Donc : $r(\{F\}) = (BP) \cap (QC) = \{G\}$ par suite : $r(F) = G$

3)b)On a : $r(F) = G$ donc : $\begin{cases} OF = OG \\ \left(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

4)a) On a : $r(C) = D$ et $r(Q) = M$ et $r(B) = C$

donc : $r((CQ)) = (DM)$ et puisque : $r((BP)) = (QC)$

alors : $r((CQ) \cap (BP)) = (DM) \cap (CQ)$ cad : $r(\{G\}) = \{H\}$ donc : $r(G) = H$

on a : $(r \circ r)(F) = r(r(F)) = r(G) = H$ et on a : $r((AN)) = (BP)$ et $r((DM)) = (AN)$

donc : $r((AN) \cap (DM)) = (AN) \cap (BP)$

donc : $r(E) = F$

On a : $(r \circ r)(EF) = r(r(E)) = r(F) = G$

4)b)puisque r est une rotation d'angle : $-\pi/2$ alors : $r \circ r$ est une rotation d'angle : $2 \times (-\pi/2) = -\pi$ donc $r \circ r$ est une symétrie central et soit K son centre

Puisque on a : $(r \circ r)(F) = H$ et $(r \circ r)(E) = G$

Alors : K est le milieu des segments $[EG]$ et $[FH]$

Donc : les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont les mêmes milieux

4) puisque les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont les mêmes milieux alors : $EFGH$ est un parallélogramme et on a aussi : $r(F) = G$ et $r(E) = F$ donc : $EF = FG$ et $\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FG}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : EFGH est un carré.

Exercice11 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \pi/2[2\pi]$. Soient I, J, K et L les milieux respectivement des segments $[AB]$ et $[BC]$ et $[CD]$ et $[DA]$.

1)Déterminer les mesures des angles suivants :

a) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ b) $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)$ c) $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}\right)$ d) $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right)$

2)soit $S_{(AB)}$ la symétrie axiale d'axe (AB)

soit $r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$ la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$

et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

a) $F = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$ b) $G = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

c) $H = r_{(D;\pi)} \circ r_{(A;\pi)}$ d) $K = r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)} \circ r_{(D;\pi)} \circ r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$

Solution :1) a)les droites (AC) et (BD) et (JL) et (IK) sont des axes de symétries du carré ABCD

On a : $S_{(AC)}(A) = A$ et $S_{(AC)}(C) = C$ et $S_{(AC)}(B) = D$

Donc on deduit que : $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) On a : $S_{(LJ)}(A) = D$ et $S_{(LJ)}(C) = B$ et $S_{(LJ)}(B) = C$

Donc on deduit que : $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Puisque la rotation conserve la mesure de l'angle orienté et on a : $r_{(O;\pi)}(A)=C$ et $r_{(O;\pi)}(B)=D$ et $r_{(O;\pi)}(C)=A$ alors : $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

d) puisque : $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ alors : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

2)a) $F=S_{(AC)}\circ S_{(BD)}$??

On a : $(AC)\cap(BD)=\{O\}$

Donc F est la composé de deux symétries orthogonaux d'axes qui se coupent en O

Donc : F est rotation de centre O

Et puisque : $(AC)\perp(BD)$ alors : F est une symétrie central de centre O ou $F=r_{(O;\pi)}$

2)b) $G=S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$??

On a : $(AB)\cap(AC)=\{A\}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc G est la composé de deux symétries orthogonaux d'axes qui se coupent en A

Donc : G est rotation de centre A

$G=r_{\left(O;2\frac{\pi}{4}\right)}=r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$

2)c) $H=r_{(D;\pi)}\circ r_{(A;\pi)}$??

Puisque toute rotation est le composé de deux symétries axiales on peut en déduire :

$r_{(D;\pi)}=S_{(DC)}\circ S_{(DA)}$ et $r_{(A;\pi)}=S_{(DA)}\circ S_{(AB)}$

Donc : $H=r_{(D;\pi)}\circ r_{(A;\pi)}=S_{(DC)}\circ S_{(DA)}\circ S_{(DA)}\circ S_{(AB)}$

Et puisque : $S_{(DA)}\circ S_{(DA)}=I_P$ alors : $H=S_{(DC)}\circ S_{(AB)}$

Et puisque : $(DC)\parallel(AB)$ alors : H est une translation et puisque : $A\in(AB)$ et D la projection du point D sur la droite (DC) alors :

$S_{(DC)}\circ S_{(AB)}=t_{2\overrightarrow{AD}}$ donc : $H=t_{2\overrightarrow{AD}}$

d) $K=r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)}\circ r_{(D;\pi)}\circ r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$??

Puisque toute rotation est le composé de deux symétries axiales on peut en déduire :

$r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)}=S_{(CA)}\circ S_{(CD)}$ et $r_{(D;\pi)}=S_{(DC)}\circ S_{(DA)}$ car $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Et on a : $r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}=S_{(AD)}\circ S_{(AC)}$

Donc :

$K=S_{(CA)}\circ S_{(CD)}\circ S_{(DC)}\circ S_{(AD)}\circ S_{(AC)}=S_{(CA)}\circ I_P\circ I_P\circ S_{(AC)}$

$K=S_{(CA)}\circ S_{(AC)}=I_P$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs

et exercices

Que l'on devient un mathématicien